Matematica finanziaria: svolgimento prova di esame del 13 settembre 2005

1. [**5 punti cleai, 5 punti altri**] Si consideri un prestito di 500€ rimborsabile in 5 anni con rata costante annuale e posticipata. Di che tipo di ammortamento si tratta? Si determini la rata in modo che il rendimento effettivo risulti del 12% e si scriva il piano di ammortamento.

   Svolgimento. Il tipo di ammortamento è francese.

   Diciamo R la rata incognita del prestito. Il grafico del prestito dal punto di vista del creditore è

$$\begin{array}{cccccc} -500 & R & R & R & R & R \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array}$$

   e il rendimento effettivo i del prestito si trova risolvendo l'equazione in $\nu = 1/(1+i)$

$$-500 + R\frac{\nu(1-\nu^5)}{1-\nu} = 0.$$

   Se avessimo ν, questa sarebbe un'equazione facilissima da risolvere per trovare R. Ma noi abbiamo ν! Infatti sappiamo (anzi, vogliamo) che $i = 0.12$, e dunque $\nu = 1/1.12$. L'equazione è allora:

$$-500 + R\frac{\frac{1}{1.12}(1-\frac{1}{1.12^5})}{1-\frac{1}{1.12}} = 0 \iff R = 500\frac{0.12}{1-\frac{1}{1.12^5}} = 138.705$$

   Il piano di ammortamento è allora:

anno	QC	QI	Rata	DR
1	78.705	60	138.705	421.295
2	88.1496	50.5554	138.705	333.145
3	98.7276	39.9774	138.705	234.418
4	110.575	28.1301	138.705	123.843
5	123.844	14.8612	138.705	0

■

2. [**3 punti cleai, 3 punti altri**] Si possiede un capitale di 1000€ e lo si vuole impiegare per 3 anni. Si hanno le seguenti 2 possibilità:

   (a) regime di interesse composto al tasso d'interesse effettivo del 10% annuo;

   (b) regime di interesse composto al tasso d'interesse nominale del 10% annuo, pagabile ogni 6 mesi.

   Supponendo che nel caso (b) i ricavi intermedi vengano investiti in un regime composto al 10.25% annuo, dire quale dei due investimenti fornirà il montante maggiore alla fine dei tre anni.

   Svolgimento. L'uguaglianza

$$(1+\frac{0.1}{2})^2 - 1 = 0.1025$$

   ci dice che 0.1025 è il tasso effettivo equivalente allo 0.1 nominale annuo pagabile ogni 6 mesi, e dunque investire nell'ipotesi (b) è equivalente ad investire in regime composto al tasso effettivo del 10.25% annuale. Questo investimento fornisce ovviamente un montante maggiore che non l'ipotesi (a). ■

3. [**6 punti cleai, 5 punti altri**] Si vuole acquistare un'automobile il cui prezzo è di 20000€. Scegliere con il criterio del REA al 5% annuo tra le seguenti modalità di pagamento:

   (a) pagare in contanti, con uno sconto di 2000€;

(b) pagare (senza sconto) in 20 rate mensili, secondo un piano di ammortamento francese al tasso mensile dello 0.5%.

Svolgimento. Nel caso (a), il REA è banalmente 18000€. Nel caso (b), dobbiamo prima di tutto determinare la rata R da pagare mensilmente. Questa si trova come nell'esercizio 1, imponendo che il tasso interno di (1) sia 0.005, cioè ponendo $\nu = 1/1.005$ nell'equazione $\text{REA} = 0$.

$$\begin{array}{cccccc} -20000 & R & R & \cdots & R & R \\ \bullet & \bullet & \bullet & \longrightarrow & \bullet & \bullet \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 19 & 20 \end{array} \tag{1}$$

Il REA di (1) è la soluzione dell'equazione

$$-20000 + R\frac{\nu(1-\nu^{20})}{1-\nu} = 0$$

che con la sostituzione $\nu = 1/1.005$ diventa

$$-20000 + R\frac{\frac{1}{1.005}(1-\frac{1}{1.005^{20}})}{1-\frac{1}{1.005}} = 0 \iff R = 20000\frac{0.005}{1-\frac{1}{1.005^{20}}} = 1053.33.$$

Adesso dobbiamo calcolare il REA di (2), al tasso annuo del 5%.

$$\begin{array}{cccccc} & 1053.33 & 1053.33 & \cdots & 1053.33 & 1053.33 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \longrightarrow & \bullet & \bullet \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{2}{12} & \cdots & \frac{19}{12} & \frac{20}{12} \end{array} \tag{2}$$

Posto come al solito $\nu = 1/1.05$, si ha

$$\text{REA}(0.05) = 1053.33\frac{\nu^{\frac{1}{12}}(1-\nu^{\frac{20}{12}})}{1-\nu^{\frac{1}{12}}} = 19553.2$$

e pertanto, nelle ipotesi proposte dal testo dell'esercizio, conviene l'acquisto in contanti (si spendono 18000€ invece di 19553.2€). ■

4. **[5 punti cleai, 5 punti altri]** Il montante al tempo t anni di un capitale unitario è descritto da una legge finanziaria la cui forza d'interesse è

$$\delta(t) = 0.02t$$

(a) Calcolare la legge finanziaria $r(t)$ e dire se si tratta di una legge scindibile;

(b) calcolare il montante dopo 4 anni di un capitale il cui montante al primo anno è di 50€.

Svolgimento. Punto (a). Data la forza d'interesse $\delta(t)$ di una legge finanziaria $r(t)$, sappiamo che

$$r(s) = \exp\int_0^s \delta(t)\,dt.$$

L'esercizio si risolve quindi calcolando

$$\int_0^s 0.02t\,dt = 0.01s^2$$

da cui $r(s) = e^{0.01s^2}$.

Le leggi scindibili in una variabile sono solo quelle esponenziali, quindi r non è scindibile (attenzione, per esponenziale si intende della forma $e^{\delta s}$, non va bene se al posto di s c'è s^2 o altre potenze di s). Che il regime non fosse scindibile si poteva dedurre anche dal fatto che la forza d'interesse non è costante.

Punto (b). Il montante si ottiene scontando 50€ di un anno, e poi capitalizzandoli di 4. Dunque

$$M = \frac{50}{r(1)}r(4) = \frac{50}{e^{0.01}}(e^{0.16}) = 50e^{0.15} = 58.0917.$$

■

5. [**5 punti cleai, 4 punti altri**] Calcolare (utilizzando il fattore di sconto approssimato al meglio di due cifre decimali) il TAN e il TAEG di un finanziamento di 900€ pagabile in 3 rate mensili posticipate da 300€, supponendo le spese accessorie pari a 10€ per l'apertura del finanziamento e il 5% di diritti riscossione su ogni rata.

Svolgimento. Questo finanziamento si sintetizza, dal punto di vista del debitore, nel seguente grafico:

-10	-15	-15	-15
900	-300	-300	-300
0	1	2	3

Sia TAN che TAEG esistono perchè l'operazione è un finanziamento.

Il TAN è 0, visto che la somma delle rate è uguale alla somma finanziata.

Il TAEG si trova risolvendo

$$f(\nu) = 890 - 315\nu - 315\nu^2 - 315\nu^3 = 0.$$

Poiché

$$f(0.97) > 0, f(0.98) < 0, f(0.975) < 0$$

otteniamo che $\nu \in (0.97, 0.975)$, e possiamo approssimarlo al meglio di due cifre decimali con 0.97. Il TAEG è allora:

$$\text{TAEG} = \frac{1}{\nu} - 1 \simeq 0.03.$$

■

6. [**4 punti cleai, 3 punti altri**] Determinare il tasso a cui valutare l'operazione finanziaria $(-200, 110, 130)$ affinché il REA sia pari a 30€.

Svolgimento. Il grafico dell'operazione finanziaria è

-200	110	130
0	1	2

Posto $\nu = 1/(1+i)$, il $\text{REA}(i)$ di questa operazione finanziaria è

$$\text{REA}(i) = -200 + 110\nu + 130\nu^2$$

L'equazione che permette di determinare il tasso richiesto è dunque $\text{REA}(i) = 30$, cioè

$$-200 + 110\nu + 130\nu^2 = 30 \iff \nu = \frac{-55 + \sqrt{55^2 + 230 \cdot 130}}{130} = \frac{-55 + \sqrt{32925}}{130}$$

Notare che abbiamo scartato la soluzione negativa, in quanto priva di significato finanziario. La soluzione scelta è sicuramente positiva, per il teorema di Cartesio.

Il tasso mensile di rendimento i è quindi

$$i = \frac{1}{\nu} - 1 = \frac{130}{-55 + \sqrt{32925}} - 1 \simeq 0.03$$

■

7. [**3 punti cleai, 3 punti altri**] Si considerino i titoli A, B, C, D dati dalla tabella 1. Qual è il più sensibile a piccole variazioni del tasso di valutazione?

Svolgimento. Il più sensibile a piccole variazioni dei tassi è quello con maggior durata media finanziaria. Essendo tutti titoli di durata 3 anni, nessuno di loro può avere DMF maggiore di 3. Visto poi che c'e' uno e un solo TSC(3), la sua durata media finanziaria è proprio 3 e nessuno degli altri titoli può averla maggiore o uguale. Quindi la risposta è D. ■

8. **[no cleai, 3 punti altri]** Si assuma una struttura per scadenze descritta dalla tabella 2 e si supponga l'esistenza di un tasso a termine $i(1,2) = \frac{184}{2625}$. Dire se c'è possibilità di arbitraggio ed eventualmente costruirlo.

   Svolgimento. Il tasso forward presente sul mercato è proprio quello che si ottiene dalla struttura a termine data:
$$i(1,2) = \frac{(1+i(0,2))^2}{1+i(0,1)} - 1 = \frac{1.06^2}{1.05} - 1 = \frac{184}{2625}.$$
   Dunque con i dati assegnati non è possibile costruire un arbitraggio. ■

Tabella 1: Titoli A, B, C, D.

anno di pagamento	A	B	C	D
anno 1	60	64	45	0
anno 2	42	20	0	0
anno 3	135	181	0	1

Tabella 2: Tassi spot rilevati per i prossimi 5 anni.

anno	1	2	3	4	5
tasso spot	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09